

Munkácsy Katalin, ELTE

Stettner Elonóra,  
Kaposvári Egyetem

# Az analízis számítógéppel segített heurisztikus tanulása

# Pólya elmélete alapján már a wikipédia is ír a heurisztikus tanulásról

„The word `Heuristic` means to discover. In this method, the students be put in the place of an independent discoverer. The teacher sets a problem for the students and then ask them to discover the answer. Here students gets only a little help from the teacher. Students find out the solution by experiments, group discussions, or any other means. Experts say that this method has so many positives and it develops scientific attitude. What I would like to earn from you is your valuable view points and experiences about the effectiveness of this method in the college level Mathematics teaching.”

# Hogyan kezdjük az analízis tanulását?

## A szigorú felépítés szerint

- Sorozatok és függvények
- Folytonosság
- Határérték, végesben vett véges határérték
- Derivált
- Integrál

## Heurisztikus módszer

1. Minimum-maximum feladatok
2. Görbe alatti terület
  - a) Terület
  - b) Végtelen
  - c) Függvények
  - d) Végtelen határérték, határérték a végtelenben
3. Érintő
4. Függvényvizsgálat, szélsőértékfeladatok

- I. A bevezetés heurisztikus módszere
- II. A heurisztikus bevezetés után megkezdhetjük a szigorú felépítést

# I. Heurisztikus módszer

# Definíciók és a fogalmak értelmezése

---

Most, a kezdők számára, ebben a felépítésben nincsenek definíciók

- Nincsenek hiányos, rossz, érthetetlen definíciók
- Nincsenek érthetetlen és értelmetlen bizonyítások

# 1. Szélsőérték problémák

# Kezünkben a tudás



Rögzített térfogat, változó felszín





# Szélsőérték-probléma gyerekeknek: Ha adott a terület, mekkora lehet a kerület?





## 2. Görbe alatti terület

a) A terület

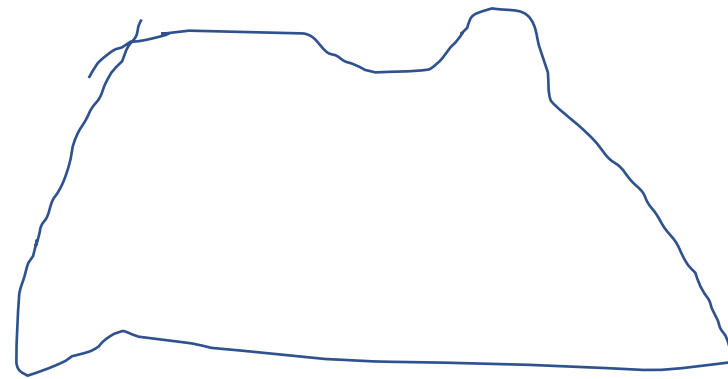
Azt nem  
kérdézzük, hogy  
mi a terület, azt  
kérdézzük, hogy  
mennyi a terület.

- An approach to defining what is meant by "area" is through [axioms](#). "Area" can be defined as a function from a collection  $M$  of special kind of plane figures (termed measurable sets) to the set of real numbers which satisfies the following properties:
- For all  $S$  in  $M$ ,  $a(S) \geq 0$ .
- If  $S$  and  $T$  are in  $M$  then so are  $S \cup T$  and  $S \cap T$ , and also  $a(S \cup T) = a(S) + a(T) - a(S \cap T)$ .
- If  $S$  and  $T$  are in  $M$  with  $S \subseteq T$  then  $T - S$  is in  $M$  and  $a(T - S) = a(T) - a(S)$ .
- If a set  $S$  is in  $M$  and  $S$  is congruent to  $T$  then  $T$  is also in  $M$  and  $a(S) = a(T)$ .
- Every rectangle  $R$  is in  $M$ . If the rectangle has length  $h$  and breadth  $k$  then  $a(R) = hk$ .
- Let  $Q$  be a set enclosed between two step regions  $S$  and  $T$ . A step region is formed from a finite union of adjacent rectangles resting on a common base, i.e.  $S \subseteq Q \subseteq T$ . If there is a unique number  $c$  such that  $a(S) \leq c \leq a(T)$  for all such step regions  $S$  and  $T$ , then  $a(Q) = c$ .
- It can be proved that such an area function actually exists. [\[11\]](#)

# Elég jó megoldás

Felezd meg! Egyezzen meg egymással a keletkező két-két alakzat területe.

Működik ez a szabály? Egyik oszt, másik választ.



# Határozott integrál

Becsüld meg a területet, Manuál:

<https://www.youtube.com/watch?v=ohSdtIPrRBk>

Becsüld meg a területet :

<https://www.geogebra.org/m/edrchsjs>

## b) A végtelen

Nem kérdezzük, mi a végtelen.

- Hány prímszám van?
- Ha be akarnánk tenni még egy elemet a sorozatba, például a pi-t, hogyan tehetnénk azt meg?  
(A diákjaim szerint tegyük a végére)
- A végtelen szállodák problémája

## c) Függvények



„Függvény vagyok!”

Mathematikum, Giessen,  
Németország

Amikor a lábunkkal rajzolunk  
egy grafikont.

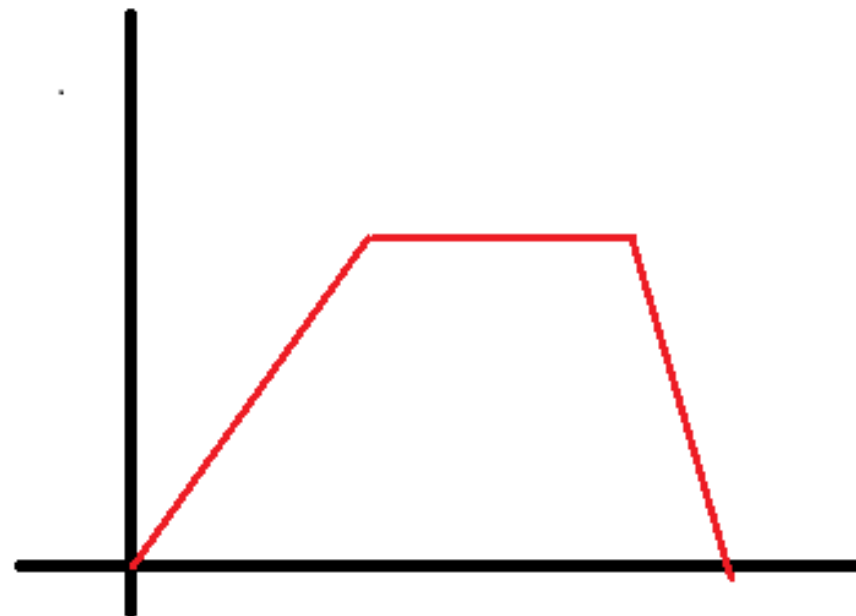
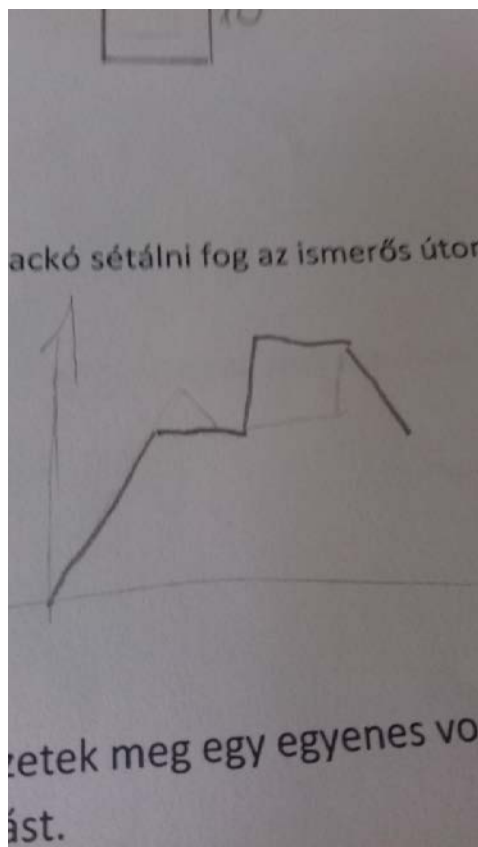




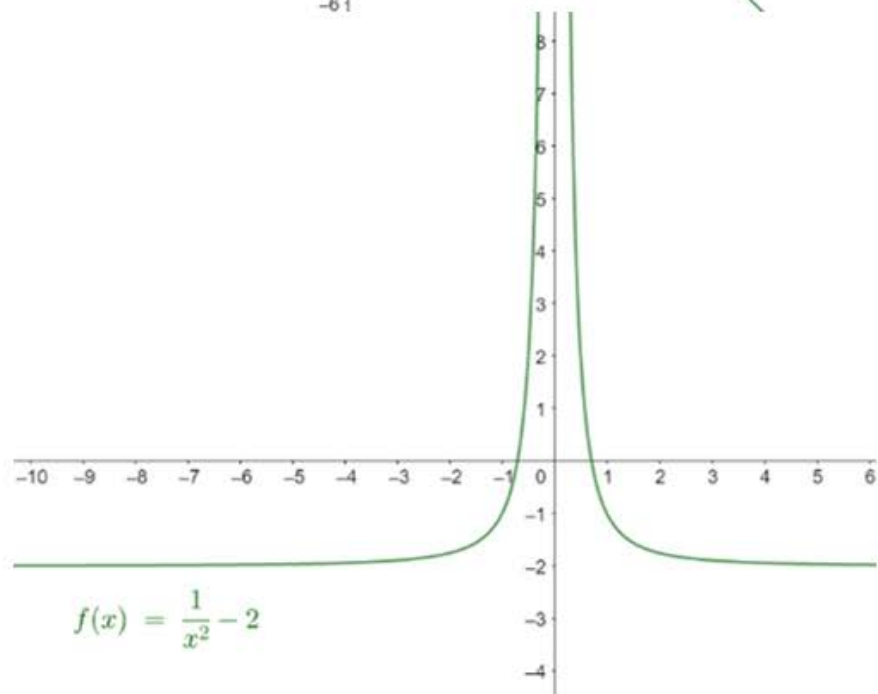
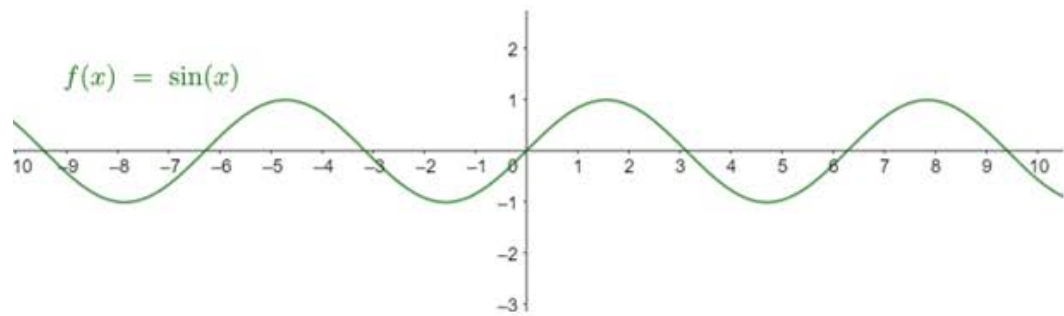
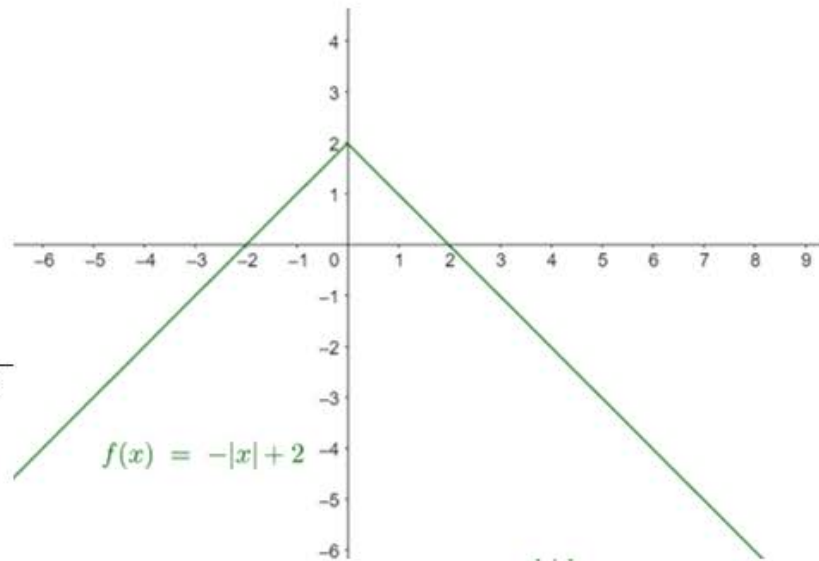
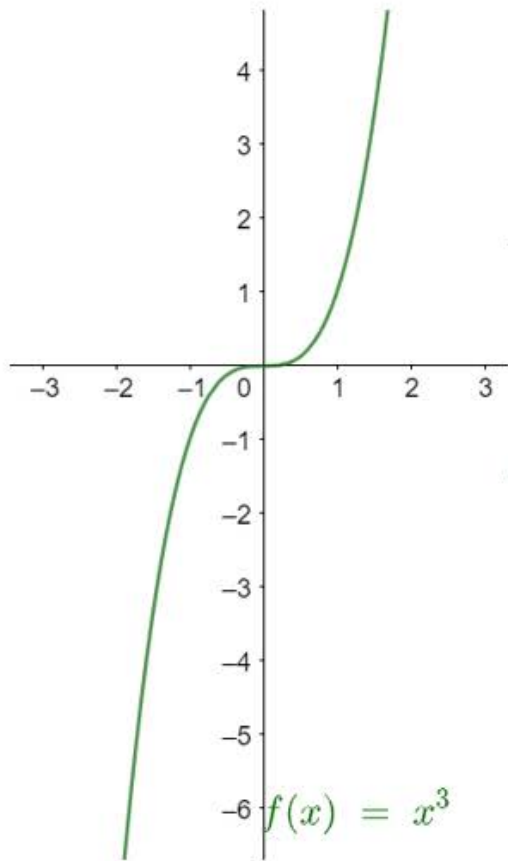
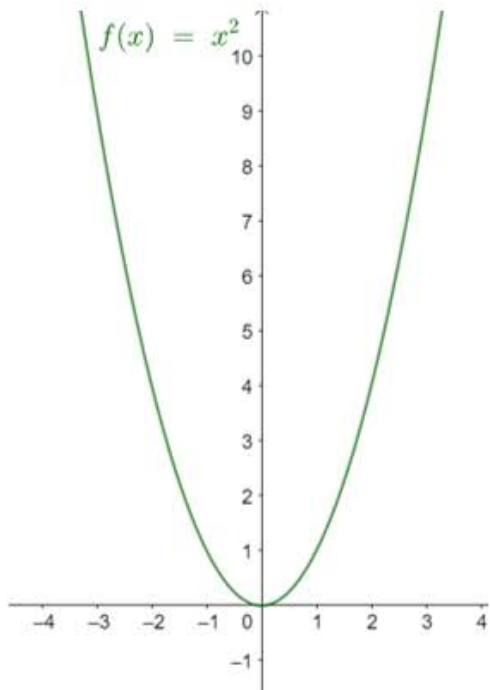
Hasonló feladat a  
tanteremben,  
számítógép nélkül,  
csoportmunkában

„Kottázd le a mozgást!”  
Olvasd a grafikont!

---

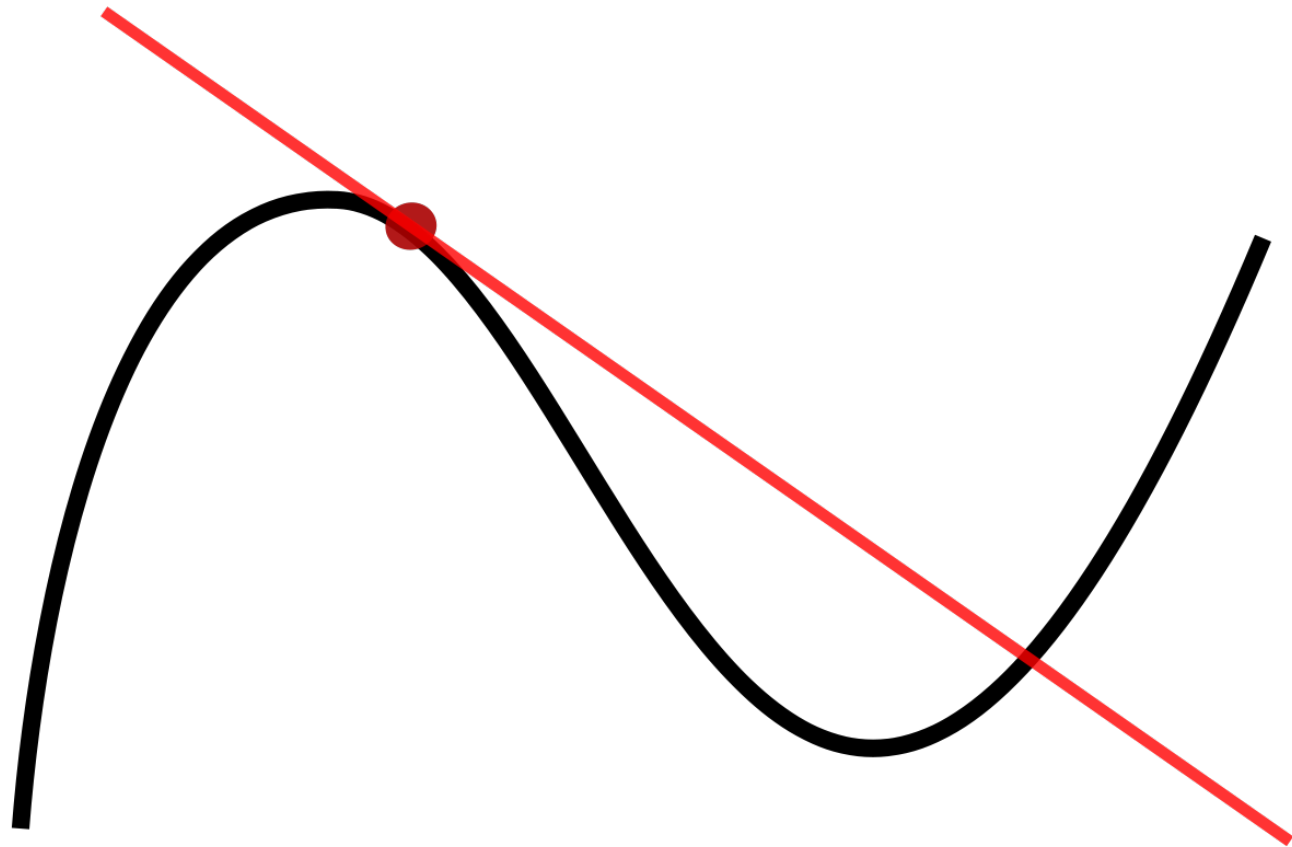


d) Végtelen  
határérték,  
végtelenben  
vett  
határérték



### 3. Érintő

- Az érintő olyan egyenes, ami hozzásimul a görbéhez.









# Rajzoltass érintőt!

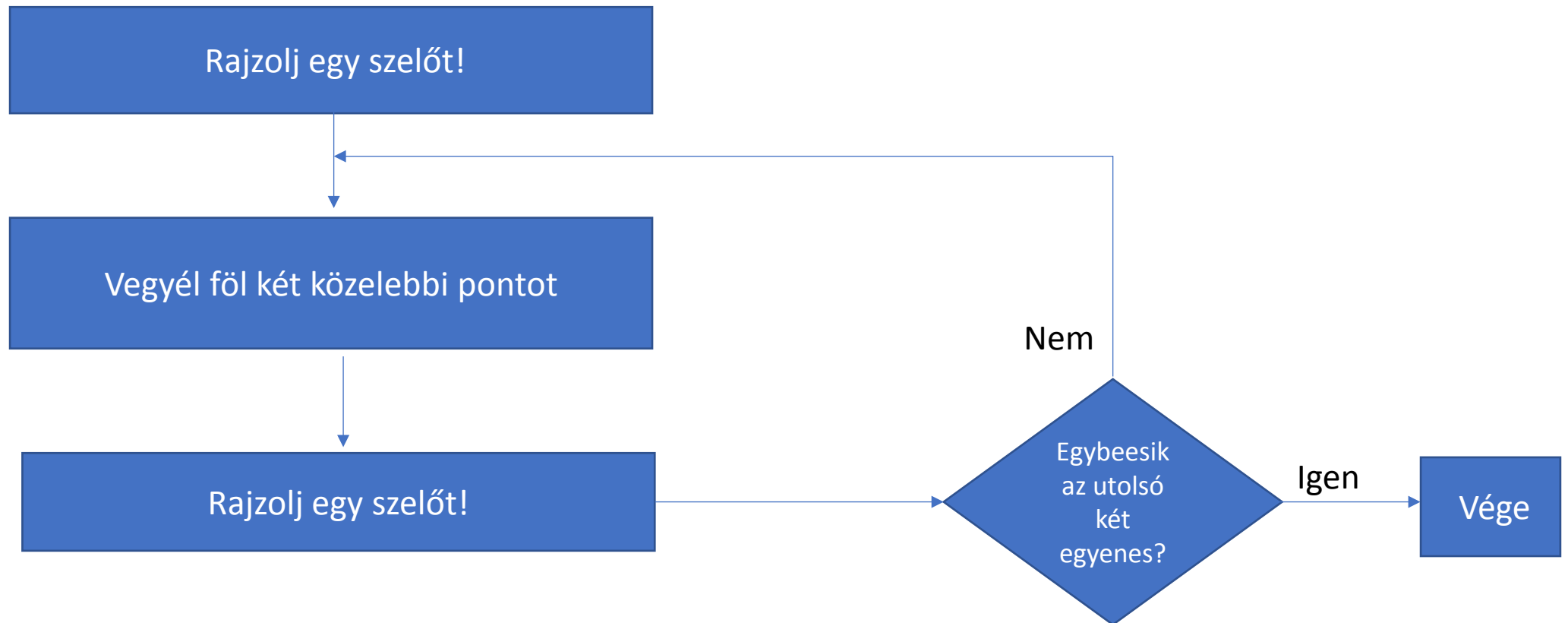
- Telefonbeszélgetés útján rajzoltasd meg az érintőt.
- Mindketten jól ismeritek a szelő fogalmát.

# Rajzoltass érintőt!

- Módszertani megjegyzések:
- Célszerűbb a szelő mindkét metszéspontját mozgó pontnak tekinteni.
- Érdeemes szabályos, szemmetrikus, egyenlő lépésekkel közeledni az adott érintési ponthoz.
- A háttérben a konvergencia szokásos definíciója helyett a Cauchy konvergencia kritérium áll..
- Frontális munkában a tanár a diákoknak háttal, a táblára rajzolja a javasolt egyeneseket.
- A folyamatábra megrajzolása jóval későbbi feladat.

# Rajzoltass érintőt!

Vázlatos folyamatábra



# Az érintő meredekségének becslése

- Az érintő meredekségének becslése, Tutorial: <https://www.youtube.com/watch?v=x7hwrNSgD88>
- Az érintő meredekségének becslése : <https://www.geogebra.org/m/gtqeredm>

# A derivált

- Pontonkénti derivált és a derivált függvény, Tutorial  
<https://www.youtube.com/watch?v=1nUY11FmQ9g>
- Pontonkénti derivált és a derivált függvény :  
<https://www.geogebra.org/m/wvry4ptr>

## 4. Szélsőérték feladatok megoldása deriválással

- A diákok az interneten található deriválási szabályokat és az elemi függvények deriváltjait felhasználva oldhatják meg a feladatokat
- Ekkor még a deriválási szabályok fekete dobozként működnek. Eddigi tapasztalataik alapján a diákoknak inkább érzéseik, mint tudásuk van.

## II. A szigorú felépítés szerint

- Sorozatok és függvények
  - Folytonosság
  - Határérték, végesben vett véges határérték
  - Derivált
  - Integrál
- 
- Az analízis tanításának formális útján is használhatók a heurisztikus tanulás elemei

# Felsőhatár függvény

- Integrálfüggvény, Manual:  
<https://www.youtube.com/watch?v=9LLpvDeEbP8>
- Integrálfüggvény2, Manual:  
<https://www.youtube.com/watch?v=oOQGkPJ3bWk>
- Integrálfüggvény2:  
<https://www.geogebra.org/m/aghaxgsj>



- Köszönjük megtisztelő figyelmüket!

# Appendix 1

- Érintő meredekség becslése bemutató:  
<https://www.youtube.com/watch?v=x7hwrNSgD88>
- Érintő meredekség becslése:  
<https://www.geogebra.org/m/gtqeredm>
- Adott függvény pontonkénti deriváltja és a derivált függvény bemutató:  
<https://www.youtube.com/watch?v=1nUY11FmQ9g>
- Adott függvény pontonkénti deriváltja és a derivált függvény:  
<https://www.geogebra.org/m/wvry4ptr>

## Appendix 2

- Terület becslése bemutató:
- <https://www.youtube.com/watch?v=ohSdtIPrRBk>
- Terület becslése:
- <https://www.geogebra.org/m/edrchsjs>
- Integrálfüggvény1 bemutató:
- <https://www.youtube.com/watch?v=9LLpvDeEbP8>
- Integrálfüggvény2 bemutató:
- <https://www.youtube.com/watch?v=oOQGkPJ3bWk>
- Integrálfüggvény2:
- <https://www.geogebra.org/m/aghaxgsj>