

Pólya György

(1887—1985)

A modern matematikai
heurisztika megalkotója

Dr. Kántor Sándorné

DE Matematikai Intézet

Pólya György



Pólya György

- 25 éve halt meg Pólya György, de munkássága ma is hatással van a matematikusok és a matematikatanárok hétköznapijaira.
- Kiváló tudós és nagyszerű tanáregyéniség volt, aki maradandót alkotott mind a tudomány, mind a matematika tanítása területén.
- Neve összeforrt a modern heurisztikával, a felfedezés tudományával.
- Matematikai heurisztikával foglalkozó könyvei több, mint 50 év távlatából is aktuálisak és iránymutatóak.

Pólya György

- Foglalkozott a matematika különböző területeivel: kombinatorikával, valószínűségszámítással, valós és komplex függvényekkel, analízissel, geometriával, számelmélettel, az algebrai egyenletek elméletével, matematikai fizikával.
- Ő alkotta meg a modern matematikai heurisztikát.
- Heurisztikus módszerét ma már nem csak a matematikában és természettudományokban, hanem minden kutatási eljárásnál alkalmazzák.
- 250 cikke és társszerzőkkel együtt 10 könyve, illetve monográfiája jelent meg, közülük számosat több nyelvre lefordítottak.
- Összegyűjtött műveit 4 kötetben adták ki Cambridge-ben 1974 és 1984 között.

Pólya György

A tanárok számára, a magyarra lefordított, matematikatanítással foglalkozó könyvei a legismertebbek:

- *A gondolkodás iskolája,*
- *A problémamegoldás iskolája,*
- *A matematikai gondolkodás művészete*
 - I. *Indukció és analógia,*
 - II. *A plauzibilis következtetés.*
- *Matematikai módszerek a természet-tudományokban.*

Pólya György



Pólya György

Nagyon nagy sikert aratott a Szegő Gáborral közösen írt első könyvük: *Feladatok és tételek az analízis köréből*.

Számos tétel és fogalom őrzi Pólya nevét:

- Pólya-féle modern heurisztika
- Pólya-féle eloszlás
- Pólya-féle gyakoriságfüggvény
- Pólya-féle urnamodell
- Pólya kritérium
- Pólya reprezentációk
- Pólya-féle hézagtételek
- Pólya - Carison tétel
- Pólya-Schönberg sejtés
- Pólya-csúcsok
- Pólya –féle formula a kombinatorikában
- Hilbert-Pólya feltevés
- Pólya folyamat a rendszerdinamikában.

Pólya György életrajza

- Pólya György 1887. december 13-án született Budapesten.
- Életútját több tényező befolyásolta. Családi környezete meghatározó volt.
- Édesapja Pólya (Pollák) Jakab kiváló közgazdász, aki számos könyvet írt, az MTA levelező tagja volt.
- Édesanyja Deutsch Anna, erős egyéniség volt.
- Hatan voltak testvérek 4 fiú és 2 lány.
- Testvérei közül kiemelkedő munkásságot fejtett ki a matematikához is erősen vonzódó *Pólya Jenő sebészprofesszor* (1876-1944?), akiről sebészi eljárást neveztek el.

Pólya György sebészorvos testvére



Pólya Jenő

Pólya György életrajza

- Középiskolai tanulmányait a híres II. kerületi Markó utcai főreáliskolában folytatta. 1905-ben érettségizett. Beke Manó tanította matematikára.
- *Beke Manó* a 20. század elején a magyarországi matematika-tanítási reformtörekvések fő képviselője volt, ő képviselte hazánkat nemzetközi szinten is.
- Diákkorában jó volt matematikából is, fizikából is. Bár szerette a matematikát, de szeretete nem volt kizárólagos.
- A földrajz, a latin nyelv, a magyar nyelv és irodalom is kedvenc tantárgya volt. Kétszer is indult az Eötvös (mai nevén Kürschák) Matematikai Tanulóversenyen, de nem ért el különösebb eredményt.
- Széleskörű érdeklődése és a szülői ház kívánsága is tükröződött pályaválasztásában. Egyetemi tanulmányait orvostanhallgatóként kezdte el, félévig jogot, hallgatott, majd magyar-, latin- és görög nyelvszakos volt, 1907-ben pedig filozófiát tanult. Az alapvizsga letétele után fordult vissza érdeklődése a matematika felé.

Pólya György életrajza

- A későbbiekben úgy jellemezte saját magát, hogy nem volt elég jó a fizikához, de túl jó volt a filozófiához, és a matematika a kettő között helyezkedik el.
- A budapesti Tudományegyetemen Fejér Lipót és Eötvös Lóránd tanítványa volt.
- Az 1910-es évek elején több félét töltött ösztöndíjasként külföldi egyetemeken:
Bécsben (1910-1911), Göttingenben (1912-1914).
- Göttingen ebben az időben is a világ egyik vezető matematikai központja volt. Itt tanított *Félix Klein*, *D. Hilbert*, *O. Toeplitz*, *H. Weyl*, *C. Charatheodory*, *E. Hecke*, *C. Runge*, *L. Prandtl*, akik befolyással voltak későbbi munkásságára.

Pólya György életrajza

- Már egyetemi hallgatóként is publikált külföldi tudományos folyóiratokban.
- Közvetlenül az egyetemi tanulmányainak befejezése után 1912-ben benyújtotta *A valószínűségszámítás néhány kérdéséről és bizonyos velük összefüggő határozott integrálokról* című doktori disszertációját. A disszertáció érdekessége, hogy benne olyan elméleti kérdésekkel is foglalkozott, mint pl. milyen eseményeknek tulajdoníthatunk valószínűséget, mi legyen a valószínűség fogalmának intuitív megfelelője.
- Az 1914-es évet Párizsban töltötte. Itt Poincaré, Hadamard, Picard, Borel, Cartan és Lebesgues voltak a tanítómesterei.
- Hadamard volt rá döntő hatással.

Pólya György életrajza

- Az első világháború kitörése után nem tért vissza Magyarországra, mert kilátástalannak tartotta a magyarországi állásviszonyokat és bizonytalannak a politikai helyzetet.
- Önkéntesként bevonult katonának a hadseregbe, de onnan lábsérülése miatt elbocsátották.
- 1914-től 1940-ig a zürichi Műegyetemen (ETH) tanított és kutatott.
- 1928-tól nevezték ki egyetemi tanárnak. Különböző tanszékeken tanított, tanított erdészeket, mérnököket, vegyészeket, építészeket.
- Zürichben együtt dolgozott A. Hurwitz-cal és H. Weyllel.
- 1919-től tartott tanár-továbbképzéseket.
- 1921-ben Németországban tett tanulmányutat.
- 1918-ban megnősült, feleségül vette Weber fizika professzor lányát, *Stella Vera Weber*.

Pólya György életrajza

- 1924-ben jelent meg a *Szegő Gáborral* közösen írt *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* című könyvük két kötetben. Ez a könyv a 20. század egyik klasszikus analízis tankönyve, de a feldolgozásban már megjelentek a heurisztika elvei.
- 1924-1925-ben Oxfordban volt.
- 1933-ban rövid időt töltött az USA-ban.
- 1935-ben jelent meg a *Hardy – Littlewood - Pólya: Egyenlőtlenségek (Inequalities)* című könyv, amelyben a szerzők az analízisben szereplő fontos egyenlőtlenségeket tárgyalták.
- 1940-ben barátja *Szegő Gábor* meghívására a fasizmus elől kivándorolt az USA-ba.
- Négy nyelven folyékonyan adott elő. Eredetiben olvasta a magyaron kívül a német, angol, latin, görög, francia és olasz nyelven írt műveket.

Pólya György életrajza

- Először a Rhode Island Brown Egyetemen tanított, utána a Smith College vendégprofesszora volt.
- 1942-től a Stanford Egyetemen professzor.
- 1953-ban vonult nyugdíjba, de egyetemi előadásait és kutatómunkáját ezután is tovább folytatta. Egyre növekvő energiával fordult a matematikatanítás kérdései felé.
- Beteljesedett egykori matematika-tanárának, későbbi professzorának, *Beke Manónak* a jóslata:
„Úgy, úgy, maga a filozófiától jön a matematikához. Vissza fog térni a filozófiához. De ne térjen vissza túl korán.”
- Legutolsó egyetemi előadássorozatát 91 éves korában tartotta kollégái számára.
- 1985. július 7-én, 97 éves korában, mint a Stanford Egyetem professzor emeritusa halt meg Palo Altoban (USA).

Pólya György életrajza

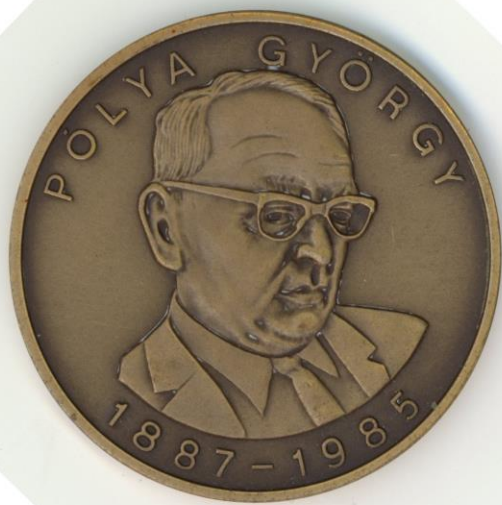
- A középiskolai tanárok számára feladatmegoldó szemináriumokat vezetett.
- Elkészítette a „*Tanítsunk meg sejteni*” című díjnyertes oktatófilmet.
- Türelmes, jó pedagógiai érzékű és színészi képességekkel megáldott tanáregyéniség volt.
- Idős korában egyre többet foglalkozott a középiskolai tanárképzés reformjával.
- Szerinte azért nem szeretik az emberek a matematikát, mert általában rosszul tanítják őket. Ha viszont jól tanítják a matematikát, akkor szeretni fogják. Az iskola célja az legyen, hogy a gyerek belső erőforrásait fejlessze és ne csak tényeket vagy kész dolgokat adjon elő.

Pólya György életrajza

Több Tudományos Akadémia választotta tagjává:

- tagja volt a Párizsi Tudományos Akadémiának
- az USA-ban a National Academy of Science-nek, az American Academy of Arts and Sciences-nek,
- a brüsszeli Academie Internationale de Philosophie des Sciences-nek.
- 1976-ban, magyarországi látogatásakor, az MTA tiszteletbeli tagjává választotta.
- 1968-ban megkapta az Amerikai Matematikai Társulat kitüntetését.
- Tiszteletére az ICME-6 (1989) kongresszusra egy emlékérem készült.

Pólya György életrajza



Pólya György életrajza

Emlékét viseli

- az SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics) kombinatorikai Pólya-díja
- az Amerikai Matematikai Társulat Pólya-díja, amellyel a College Mathematics Journal ismeretterjesztő cikkeit díjazzák
- a London Mathematical Society Pólya-díja
- A 29646 Pólya kisbolygó, amelyet 1998. november 16-án fedezett fel P: G. Comba és a kisbolygó övben kering
- a Veszprémi Pannon Egyetem Műszaki Informatikai Kara Pólya György díja a matematikatanárok tehetséggondozás területén elért eredményeiért

Pólya György életrajza



Pólya György munkássága

Kutatási területei

- *Valószínűségszámítás, valós- és komplex függvénytan, kombinatorika, számelmélet, geometria, modern heurisztika.*
- Kutatásai közül pl. a *Pólya-féle elosztás, bolyongási problémák, a Pólya-féle heurisztika* ma már az egyetemi tananyag részét képezik.
- Foglalkozott a komplex számsíkon definiált hatványsorok és a hatványsor együtthatóinak és a hatványsor által meghatározott függvények bizonyos tulajdonságai közti összefüggések vizsgálatával,
- a függvények és deriváltjaik gyökhelyei közti összefüggések vizsgálatával.

Pólya György munkássága

- *Tudományos munkásságának* egyik jelentős eredménye a *valószínűségszámítással* kapcsolatos. Valószínűségszámítási vizsgálataiban nemcsak elmélettel, hanem gyakorlati kérdésekkel is foglalkozott, pl. az állócsillagok, és egyes növények térbeli eloszlásával, a járványterjedés kérdéseivel, az arányos választási rendszerrel és a kereskedelmi reklámok valószínűségszámítási vonatkozásaival.
- Kutatási stílusának jellegzetességei hamar jelentkeztek. Legtöbbször olyan ismert konkrét esetekből indult ki, amelyek elvezettek az általános módszerhez, majd újabb speciális problémákhoz.
- Sokszor visszatért egy-egy témához.
- Kutatási elveit a későbbiekben beillesztette a heurisztikai rendszerébe.

Pólya György munkássága

heurisztika

- A modern heurisztikai módszer alapjait saját tapasztalataiból szűrte le. Saját gyakorlata alapján kristályosította ki a felfedezés és feltalálás alapelveinek a szabályait, a jó tanácsokat, a probléma megoldás általános stratégiáját.
- *„Egyetemi hallgató voltam és egy gimnazistát vizsgára készítettem elő. Éppen valami térmértani feladatot magyaráztam, amikor elvesztettem a fonalat, megakadtam. Falba tudtam volna verni a fejemet, hogy ilyen egyszerű példánál csődöt mondtam. Másnap aztán nekifeküdtem és olyan alaposan dolgoztam ki a megoldást, hogy többé el ne felejtthessem. Megpróbáltam intuitív módon elképzelni a megoldás természetes fejlődésmenetét, a benne rejlő gondolatok láncolatát. Végül is a problémamegoldási folyamat mértani ábrázolásához jutottam. Ez volt az első felfedezésem a problémamegoldásban és innen ered egész életemre szóló érdeklődésem iránta.”*

Pólya György munkássága

- Első könyvét, a *Feladatok és tételek az analízis köréből* (Zürich, Berlin, 1924) Szegő Gáborral(1895-1985) közösen írta.

A Bevezetésben a szerzők is kiemelték, hogy

- *„Ez a könyv nem csupán egyszerű feladatgyűjtemény. Legfontosabb vonása az anyag módszeres elrendezése, melynek célja az, hogy az olvasót önálló munkára ösztönözze, és hasznos gondolatokat sugalljon neki.*
- *Több időt, gondot és aprólékos munkát szenteltünk annak, hogy megtaláljuk az anyag leghatékonyabb bemutatását, mint amennyit a beavatatlan az első pillantásra feltételezne. A tényyszerű ismeretek közlése számunkra másodlagos szempont. Célunk mindenekelőtt, hogy kialakítsuk az olvasó helyes szemléletét, a gondolkodás egy bizonyos rendszerezettségét, amely a matematikában talán még lényegesebb, mint más tudományokban.*

Pólya György munkássága

- *A helyes gondolkodási törvénynek az elméleti ismeretek helyett az embernek a **húsába és vérébe** kell beszívódniuk ahhoz, hogy azonnal és ösztönösen használni tudja azokat. Ezért az ember gondolkodási képességének a fejlesztése csak a gondolkodás gyakorlása lehet hasznos.*
- *Az ember szeretne mindent megérteni: az elszigetelt tényeket egybevetve a vele összefüggő tényekkel, az újonnan felfedezettet a már ismerttel való kapcsolatán keresztül, az ismeretlent a megszokotthoz való hasonlóság alapján a speciális eredményeket általánosítás útján, az általános eredményeket megfelelő specializálás segítségével, az összetett helyzeteket alkotó részekre bontva és a részleteket egy átfogó teljes kép keretébe foglalva.”*

Pólya György munkássága

Kiemelnék még egy szempontot, mint hasznos elvet a tanárok számára:

- *„Gyakran keletkeznek új eredmények abból is, ha munkánk iránya egybeesik egy nevezetes speciális esettel. Párhuzamok vonása is értékes módszer, amellyel új eredményeket lehet származtatni. Az olyan ötlet, amely csak egyszer használható csak **trükk**. Ha többször is fel lehet használni, akkor **módszer lesz belőle**.”*
- Pólya György Amerikában is együtt dolgozott Szegő Gáborral. Közös kutatási eredményeiket az *Izoperimetrikus egyenlőtlenségek a matematikai fizikában (Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics* (1951) című könyvükben foglalták össze.

Pólya György munkássága



Pólya György munkássága

- *A gondolkodás iskolája* (How to solve it?) című könyvében lényegében azt elemzi, hogy bármilyen feladat vagy tudományos probléma megoldásához hogyan lehet eljutni.
- A könyv belső borítóján találjuk meg a feladat megoldással kapcsolatos kristálytiszta, tömör és alapvetően fontos útmutatásait a

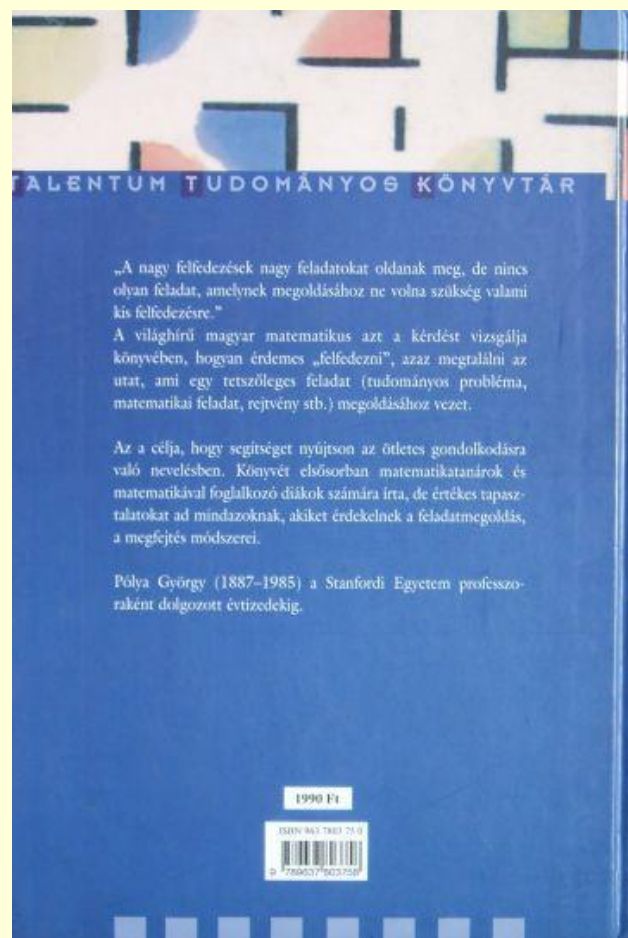
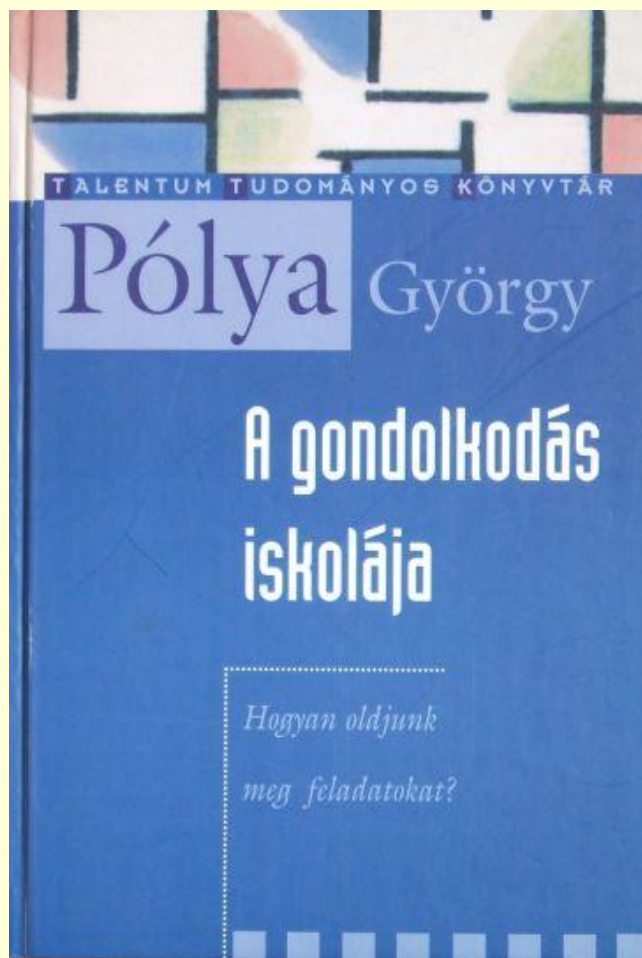
„**Hogyan oldunk meg feladatokat?**”

- *A gondolkodás iskolája* 1945-ben jelent meg és útmutatásai ma is aktuálisak. Érdekessége egyrészt az, hogy magyarra Lakatos Imre fordította, másrészt, hogy bestseller könyvvé vált. Annyira, hogy a repülőtereken, a pályaudvarokon a legkeresettebb „know-how” könyvek közé tartozott. Azóta is rendszeresen kiadják, legalább 16 nyelvre fordították le, és több, mint egy milliós példányszámban jelent meg.

Pólya György munkássága



Pólya György munkássága



Pólya György munkássága

- A Pólya György kutatómunkája során felhasználta saját óriási és szerteágazó tanítási tapasztalatait. Elsősorban a kézzelfogható és gyakorlati oldalt hangsúlyozta.

„Bármilyen probléma megoldása valamilyen nehéz helyzetből kivezető út megtalálását, valamilyen akadály megkerülését jelenti, olyan cél elérését, amelyhez egyébként közvetlenül nem tudtunk volna eljutni. A probléma megoldása az értelem jellegzetes teljesítménye, és az értelem az emberiség jellegzetes képessége: tulajdonképpen a probléma megoldás a legjellemzőbben emberi tevékenység.

A probléma megoldás csakúgy gyakorlat kérdése, mint az úszás, sízés vagy zongorázás. Megtanulni is csak utánzás és gyakorlat útján lehet. Nem adhatok bűvös kulcsot, amely minden ajtót megnyit, és minden problémát megold, de adhatok utánozható jó példákat és sok alkalmat a gyakorlásra. Aki úszni akar tanulni, annak vízbe kell ugrania, aki problémákat megoldani akar megtanulni, annak a problémák megoldását kell gyakorolnia.”

Pólya György munkássága

A gondolkodás iskolája

Egy matematikai probléma megoldásának négy lépését fejti ki részletesen a könyvben megtaláljuk.

Ezek a következők:

- *Értsd meg a problémát!*
- *Készíts tervet a probléma megoldására! (Keress összefüggést az adatok között. Ha nem találsz közvetlen összefüggést, nézz segédfeladatok után. Végül készítsd el a megoldás tervét)*
- *Hajtsd végre a tervedet!*
- *Vizsgáld meg a megoldást!*

A könyv egy hasznos stratégiagyűjteményt is tartalmaz. Bemutatja a ma már sokszor alkalmazott *fordított irányú bizonyítási stratégiát*.

Pólya György munkássága

HOGYAN OLDJUNK MEG FELADATOKAT?

ELŐSZÖR

Értsd meg a feladatot.

MÁSODSZOR

Keress összefüggést
az adatok
és az ismeretlen között.

Ha nem találsz
közvetlen összefüggést,
nézz segédfeladatok után.

Végül készítsd el
a megoldás tervét.

HARMADSZOR

Hajtsd végre tervedet.

NEGYEDSZOR

*Vizsgáld meg
a megoldást.*

A FELADAT MEGÉRTÉSE

- Mit keresünk? Mi van adva? Mit kötünk ki?
- Kielégíthető-e a kikötés? Elegendő a kikötés az ismeretlen meghatározásához? Vagy nem elegendő? Vagy kevesebb is elég volna? Vagy ellentmondás van benne?
- Rajzolj ábrát. Vezess be alkalmas jelölést.
- Válaszd szét a kikötés egyes részeit. Fel tudod írni őket?

TERVKÉSZÍTÉS

- Nem találkoztál már a feladattal? Esetleg a mostanítól kissé eltérő formában?
- Nem ismeresz valami rokon feladatot? Vagy olyan tételt aminek hasznát vehetnéd?
- Nézzük csak az ismeretlent! Próbálj visszaemlékezni valami ismert feladatra, amelyben ugyanez — vagy ehhez hasonló — az ismeretlen.
- Itt van egy már megoldott rokon feladat. Nem tudnád hasznosítani? Nem tudnád felhasználni az eredményét? Nem tudnád felhasználni a módszerét? Nem tudnád esetleg valami segédelem bevezetésével felhasználhatóvá tenni?
- Nem tudnád átfogalmazni a feladatot? Nem tudnád másképpen is átfogalmazni? Idézd fel a definíciót!
- Ha nem boldogulsz a kitűzött feladattal, próbálkozzál először egy rokon feladattal. Nem tudnál kigondolni egy könnyebben megközelíthető rokon feladatot? Egy általánosabb feladatot? Vagy egy speciálisabbat? Vagy egy analóg feladatot? Nem tudnád megoldani legalább a feladat egy részét? Tartsd meg a kikötés egyik részét, a többit ejtsd el. Mennyire van így meghatározva az ismeretlen, mennyiben változhat még? Nem tudnál az adatokból valami hasznosat levezetni? Nem tudnál mondani más adatokat, amelyek alkalmasak az ismeretlen meghatározására? Meg tudnád úgy változtatni az ismeretlent vagy az adatokat, vagy ha szükséges, mind a kettőt, hogy az új ismeretlen és az új adatok közelebb essenek egymáshoz?
- Felhasználtál minden adatot? Számításba vetted az egész kikötést? Számbavetted a feladatban előforduló összes lényeges fogalmat?

TERVÜNK VÉGREHAJTÁSA

- Ellenőrizz minden lépést, amikor végrehajtod tervedet. Bizonyos vagy benne, hogy a lépés helyes? Be is tudnád bizonyítani, hogy helyes?

A MEGOLDÁS VIZSGÁLATA

- Nem tudnád ellenőrizni az eredményt? Nem tudnád ellenőrizni a bizonyítást?
- Nem tudnád másképpen is levezetni az eredményt? Nem tudnád az eredményt egyetlen pillantásra belátni?
- Nem tudnád alkalmazni az eredményt vagy a módszert valami más feladat megoldására?

Pólya György munkássága

- Pólya Györgynek a probléma megoldásra, a heurisztikára vonatkozó nézeteit a későbbiekben tanítványai tovább fejlesztették:

Alan Schoenfeld, Lakatos Imre, John Mason.

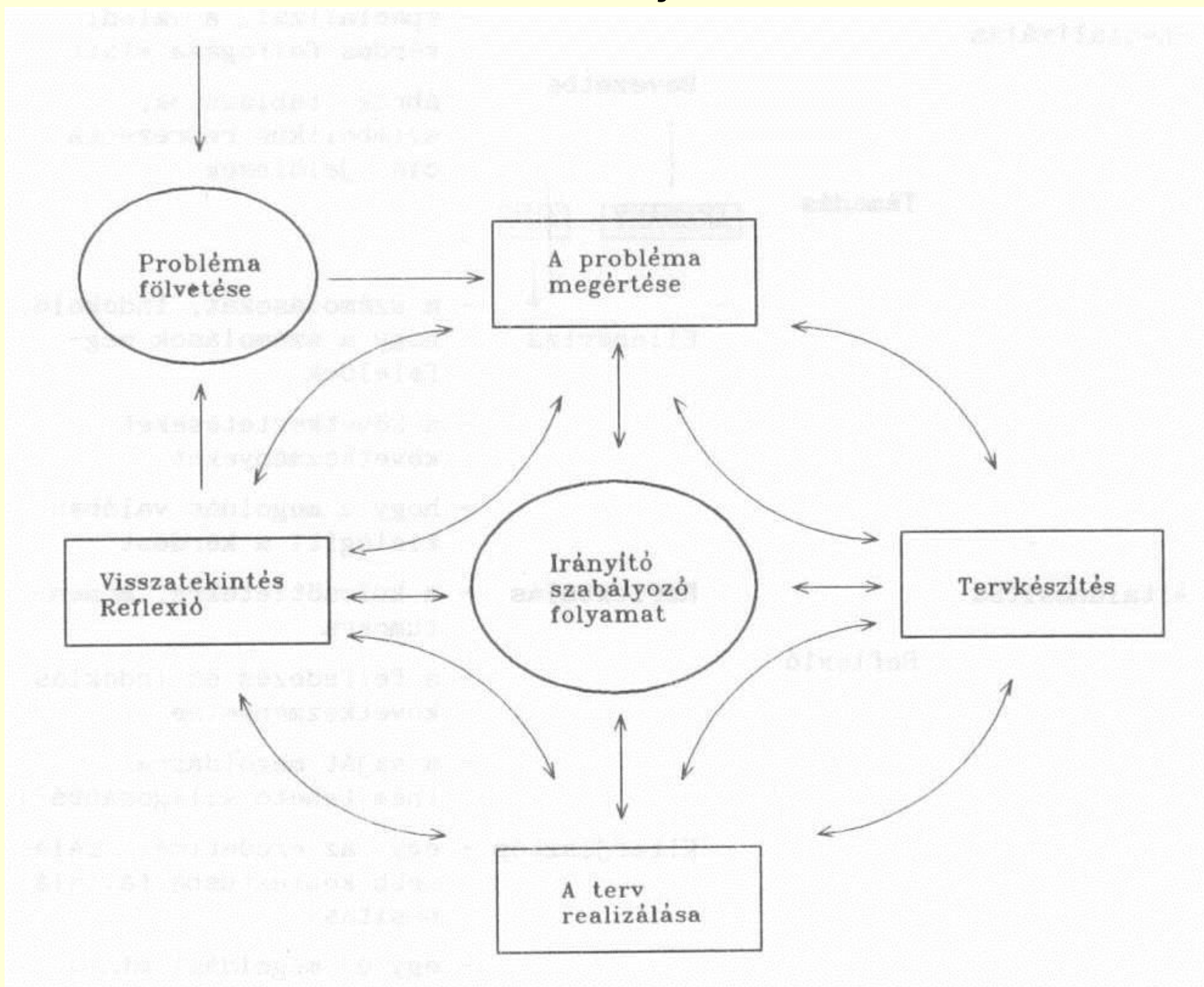
Alan Schoenfeld (1985) túl általánosnak tartotta Pólya javaslatait és ezért kiegészítette:

- I. A feladat elemzése és megértése.
- II. Megoldási terv vázlata.
- III. A megoldás keresése nehezebb feladatoknál.
- IV. A megoldás felülvizsgálata.

A következő 4 területet tartotta fontosnak:

eredetek, heurisztika, kontroll, hozzáállás.

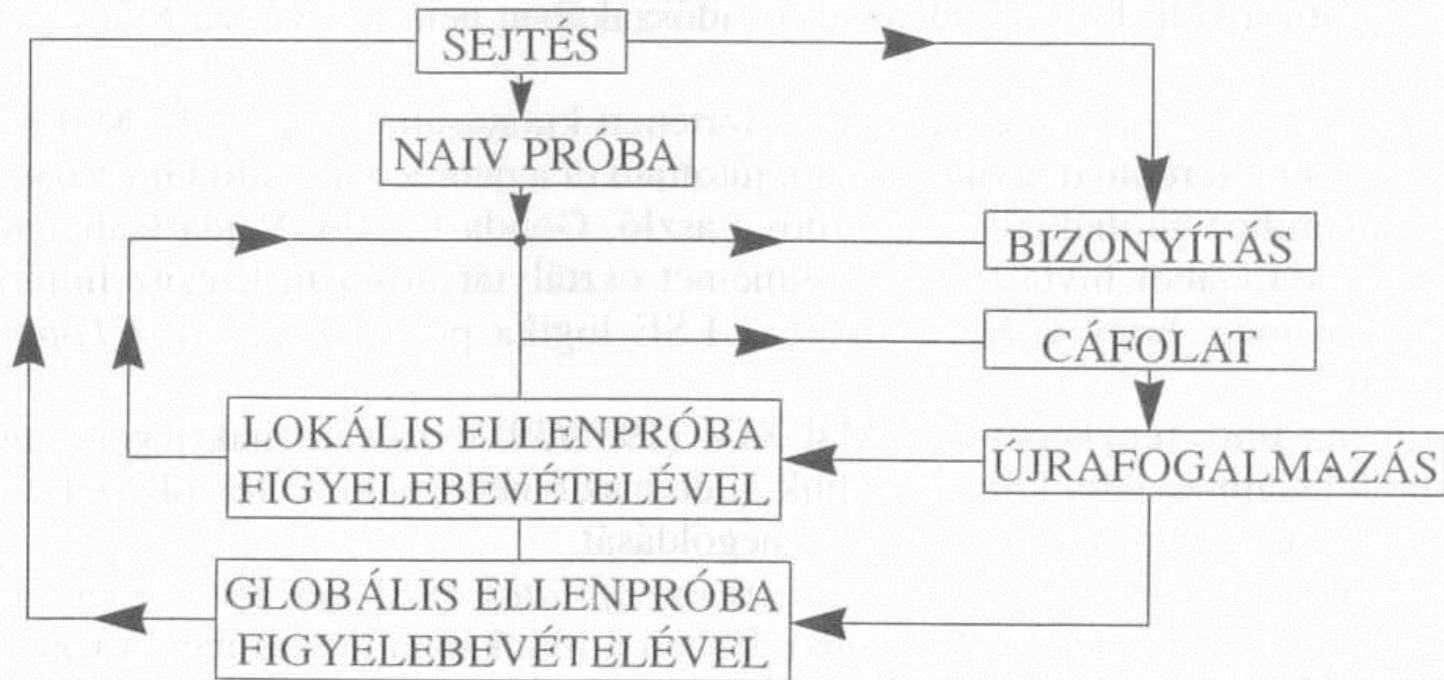
Mason sémája



Pólya György munkássága

- *Lakatos Imre, a Bizonyítások és cáfolatok* (**P**roofs and **R**efutations) című könyv szerzője angliai, második disszertációjának témáját Pólya Györgytől kapta.
- Disszertációjában tovább fejlesztette Pólya Györgynek az *Indukció és analógia* című könyvében kifejtett nézeteit. Levelezésükben Pólya György kifejtette, hogy a **P+ R** ott kezdődik, ahol ő az Indukció és analógia könyvében abbahagyta a heurisztikát.

A heurisztika Lakatos-féle modellje



2. ábra. A heurisztika Lakatos-féle modellje

Lakatos Imre



Pólya György Lakatos Imrével való levelezése

Meglehetősen világosan látom
a P & R viszonyát saját dolgaim-
hoz. Főkülönbség: Jómagam alig
tudnék valamit mondani "episto-
mologiáról" a mi a publikum
figyelmét megérdemelné. Még ha
tudtam volna is valamit mondani,
visszatartottam volna: elég nehéz
a publikummal elfogadtatni a
heuristikát. A P & R főpontja, lega-
bbal nem akartam azt még más vitás
dolgozatokkal kombinálva tovább nehezíteni.

Lább is seintem, hogy a heuristika
és epistemológia lehetséges ösre füg-
gésére felhívja a figyelmet. Tintán
heuristikáról is mond néhány pontot,
a melyet én nem láttam olyan vilá-
gosan, és mindenesetre nem mondtam
meg.

Pólya György Lakatos Imrével való levelezése

Kéowen Lakatos,

Tegnap kaptam thesisének első
visszajelzését és máma már el is
olvastam - ennél nagyobb "compliment"
-et én nem tudok mondani. Második
kompliment: ki fogom próbálni naiv és
tudatlan tanulóimon és majd be fogok
vívni az eredményről, ha valami
eredményt tudólok. Tanács: ne vágd
táron rajta semmit, kivéve a női
sajtóhibát, melyet k. kell kiemelni.
Fejére be thesisét és fogadtassa el minél
hamarabb - ha a megőrzést, len egy
megjegyzésem, raj. kétsz.

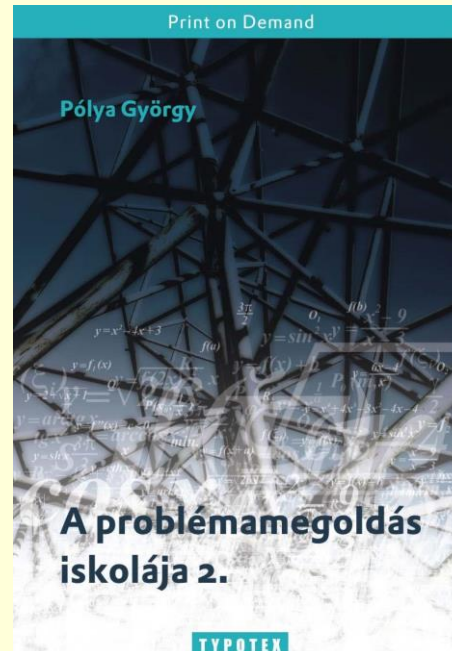
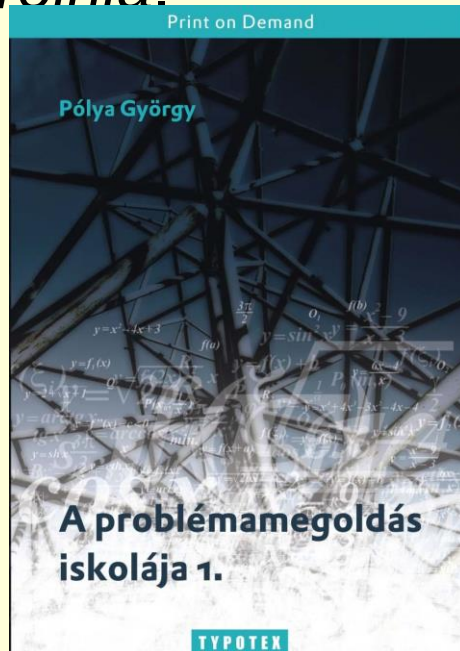
Minden jót kíván,
Nemzet üdvözlő
öreg barátja.

Palo Alto, 8.10.60

Pólya

Pólya György munkássága

- A *problémamegoldás iskolája* című könyve azok számára szól, akik saját, vagy mások gondolkodási készségét szeretnék fejleszteni. A könyv előszavában itt is azt hangsúlyozza, hogy *„aki problémát megoldani akar tanulni, annak a problémák megoldását kell gyakorolnia.”*



Pólya György munkássága

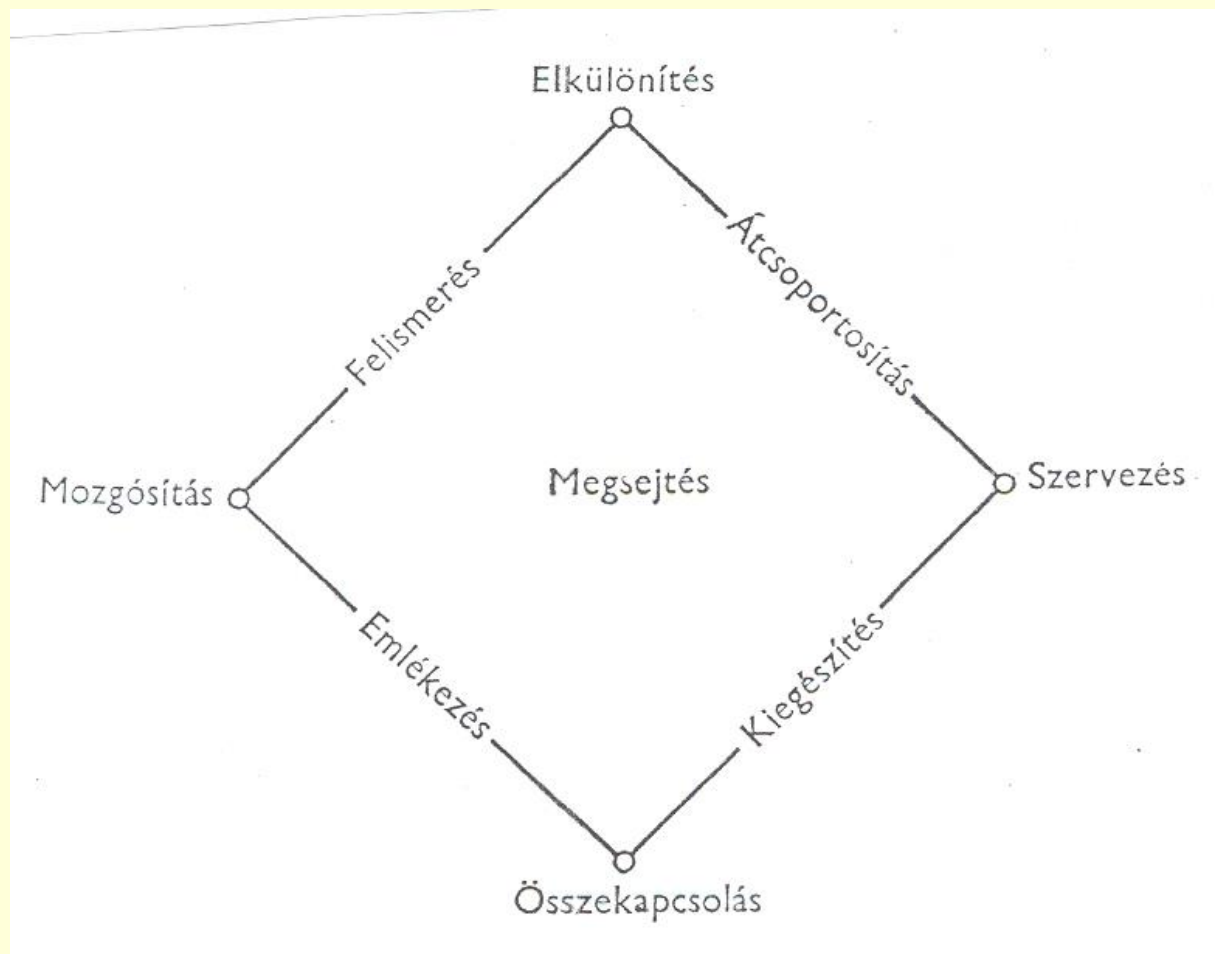
A TANÁROK TÍZPARANCSOLATA

1. Érdekeljen a szaktárgyad.
2. Ismerd a szaktárgyadat.
3. Tudnod kell a tanulás útjairól azt, hogy a legjobb az az út, amelyet magad fedezel fel.
4. Próbálj olvasni a diákok arcáról: mit várnak, mi nehéz nekik? Képzeld magad a helyükbe.
5. Ne pusztán tárgyi tudást adj tanítványaidnak, hanem fejlesszed gondolkodási készségüket is; szoktassad megfelelő értelmi magatartásra, rendszeres munkára őket.
6. Tanítsd meg őket a találgatásra.
7. Tanítsd meg őket a bizonyításra.
8. Keresd aktuális problémákban azt, ami az elkövetkező problémák megoldására hasznos lehet — igyekezz feltárni a konkrét helyzet mögött rejlő általános megoldástípust.
9. Ne áruld el egy csapásra minden titkodat — hadd találgassanak a diákok — találjanak ki annyit belőle, amennyit csak képesek.
10. Ne tömjed az anyagot tanítványaidba, hanem ösztönözzed őket értelmes tanulásra.

Pólya György munkássága
A problémamegoldás iskolája

- Pólya *A problémamegoldás iskolája* 11. fejezetében foglalkozik azzal, hogy problémamegoldás során hogyan gondolkozunk.
- Felhívja a figyelmet a problémamegoldó érzelmeire is. Megállapítja, hogy a tapasztalt feladatmegoldó meg tudja becsülni azt, hogy milyen messzire van a konkrét feladat megoldásától. A problémamegoldó belső szellemi aktivitásának folyamata kevésbé ismert. Azt tudjuk, hogy nagyon összetett, függ a tanulók képességeitől, emberi jellemzőitől és viselkedésétől. Munkájukat érzelmek kísérik, amelyek elhatározásaikkal kapcsolatosak.

Pólya György munkássága



Pólya György módszertani munkássága

A matematika és a plauzibilis okoskodás

Pólya Györgynek a legfontosabb, de magasabb fokú matematikai ismereteket is igénylő heurisztikai könyve:

A matematika és a plauzibilis következtetés (Mathematics and Plausible Reasoning)

- Ebben a munkában összekapcsolja a tudományos módszert és a művészi gyakorlatot.
- Kísérletet tesz a matematika heurisztika leltározására, elképzeléseit gyakran illusztrálja és nem mindig közvetlen matematikai példákkal, pl. nagy felfedezések története, számnevek hasonlósága különböző nyelveken, mérnöki számítások pontossága.

A II. kötetben a klasszikus arisztotelészi logika alapján felállítja a plauzibilis okoskodás főbb logikai szabályait és a feltételes valószínűség nyelvére átfordítva elemi úton bizonyítja.

Pólya György módszertani munkássága

A matematika és a plauzibilis okoskodás

- *Pólya megkülönbözteti az okoskodások fajtáit.*
- *Bizonyító okoskodás: a tudás bizonyítása*
- *Plauzibilis okoskodás: sejtés alátámasztása*

Módszerek:

a) indukció

b) analógia

c) rokon esetekből való következtetés

d) általános esetből való következtetés

Sémában:

Indukció

$A \rightarrow B$

B igaz

A hihetőbb

Analógia

$A \sim B$

B igaz

A hihetőbb

Pólya György módszertani munkássága

A matematika és a plauzibilis okoskodás

A heurisztikai szabálynak két alesetét különbözteti meg:

- I. A-ból következik B_{n+1}
 B_{n+1} nagyon eltér A korábban már igazolt $B_1, B_2, \dots B_n$ következményeitől
 B_{n+1} igaz
A sokkal hihetőbb
- II. A-ból következik B_{n+1}
 B_{n+1} nagyon hasonlít A korábban már igazolt $B_1, B_2, \dots B_n$ következményeihez
 B_{n+1} igaz
A egy kicsit hihetőbb

Pólya György módszertani munkássága

A matematika és a plauzíbilis okoskodás

Problémamegoldási módszereket, stratégiákat dolgoz ki a tanárok számára.

- Találgassunk és bizonyítsunk (módszeres próbálgatás)
- Próbakövetkeztetések (Próba-szerencse)
- Lehet, hogy rosszat sejtek? (Hamis következtetések)
- Kis lépések elve.
- Közelség és hihetőség elve.

Bemutatunk két problémát:

Pólya György módszertani munkássága

A matematika és a plauzibilis okoskodás

- *Első probléma*

Egy konvex négyszöget két átlójával négy háromszögre vágunk. Két háromszöget szemköztinek nevezzük, ha van közös csúcsuk, de nincs közös oldaluk. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat:

- a) Két szemközti háromszög területének a szorzata egyenlő a másik két szemközti háromszög területének a szorzatával.
- b) A négyszög akkor és csak akkor trapéz, ha van két egyenlő területű szemközti háromszöge.
- c) A négyszög akkor és csak akkor paralelogramma, ha mind a négy háromszög területe egyenlő.

Pólya György módszertani munkássága

A matematika és a plauzibilis okoskodás

Második probléma

Tekintsük a következő I-IV. állításokat:

- I. Ha egy körbe írt sokszög egyenlő oldalú, akkor egyenlő szögű is.
- II. Ha egy körbe írt sokszög egyenlő szögű, akkor egyenlő oldalú is.
- III. Ha egy kör köré írt sokszög egyenlő oldalú, akkor egyenlő szögű is.
- IV. Ha egy kör köré írt sokszög egyenlő szögű, akkor egyenlő oldalú is.

- a) Állapítsuk meg, hogy a négy állítás közül, melyik igaz és melyik hamis és minden esetben bizonyítsuk be az állításunkat!
- b) Ha általános sokszög helyett csupán négyszögeket tekintünk, akkor a négy állítás közül melyik igaz, melyik hamis?
- c) Mit mondhatunk az ötszögekről?
- d) Meg tudnánk-e sejteni, sőt talán bizonyítani, átfogóbb állításokat?
Ezeknek meg kell világítaniuk a b) és c) észrevételeket.

Pólya György módszertani munkássága

A matematika és a plauzibilis okoskodás

Megoldás

a) Az I. és II/IV. állítások általában igazak, de II. és III. nem igaz.

b) II. és III. hamis, a téglalap és a rombusz ellenpélda.

c) II. és III. ötszögre igaz.

d) II. és III. páratlan oldalszámú sokszög esetén

Ez (II). ' és (III.)'-ból következik.

- (II). ' Ha egy körbe írt sokszög egyenlő szögű, akkor bármely két olyan oldala, amelyek között egyetlen oldal van, egyenlő. Ezért, ha az oldalak száma páros, mondjuk $2n$, akkor vagy mind a $2n$ oldal egyenlő, vagy pedig n oldal egyenlő a -val és n oldal egyenlő b -vel, ahol $a \neq b$ és a közös csúcsban találkozó oldalak különböző nagyságúak.
- (III). ' Ha egy kör köré írt sokszög egyenlő oldalú, akkor bármely két szög, — amelyeket pontosan egy közbeeső szög választ el — egyenlő. Ezért, ha a szögek száma páros, pl. $2n$, akkor vagy mind a $2n$ szög egyenlő, vagy pedig n szög egyenlő α -val, és n szög egyenlő β -vel, ahol $\alpha \neq \beta$, és a közös szárú szögek különböző nagyságúak.
- I. (II)', (III.)' és IV. bizonyításához kössük össze a kör középpontját a sokszög csúcsaival, bocsássunk merőlegeseket a középpontból az oldalakra és keressünk egybevágó háromszögeket.

Pólya és Escher kapcsolata

- Pólya György *Über die Analogie der Krystalsymmetrie in der Ebene* (Z. Kristall 60 (1924) 278-282) című cikkében a sík 17 kristálycsoportjával foglalkozott.
- A cikk érdekessége az, hogy Pólya mind a 17 kristálycsoportot rajzzal is szemléltette. M. C. Escher testvére geográfus volt. Amikor ezt a cikket meglátta a folyóiratban, felhívta rá grafikus testvére figyelmét.
- Pólya és Escher ugyanazt a nyelvet értették, a *geometriai alakzatok nyelvét*. Escher a matematikai részt nem értette, de a rajzokból ráérezett a kristálycsoport egyes elemeinek a geometriai tulajdonságaira, a periodikusságra, a szimmetriára és a maga művészi módján Pólya rajzait átformálta, madarakat, kutyákat, stb. helyezett rá Pólya ábráira, majd a színezés bevezetésével tovább is fejlesztette az ábrázolást.

Pólya és Escher kapcsolata

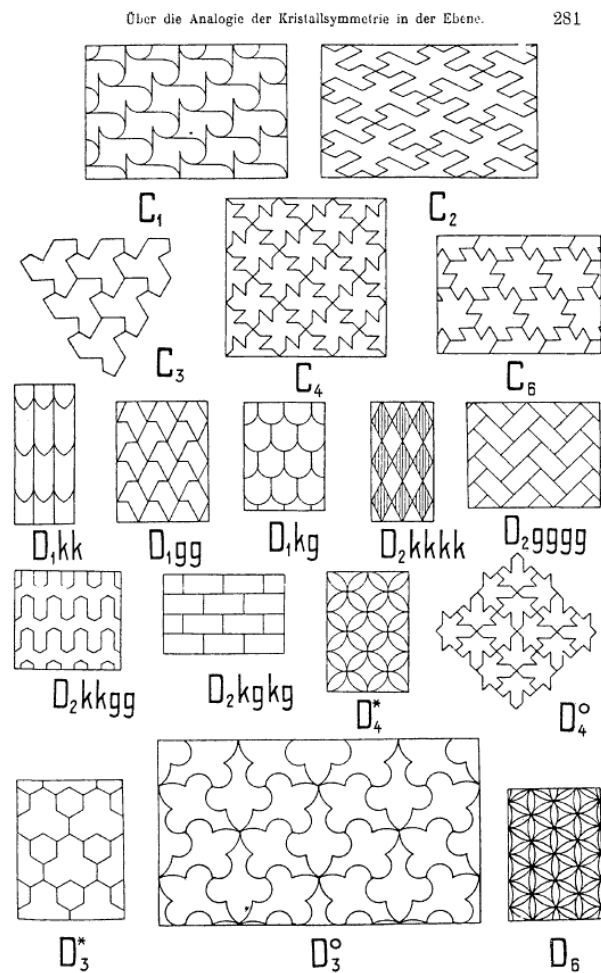


FIGURE 1

Pólya és Escher kapcsolata

Kristallographie. Escher copied Pólya's article in full—the text, dutifully recorded, was probably of little use to Escher. Pólya spoke of groups, and was concerned with classification. Escher was interested in gleaning the geometric essentials for creating periodic tilings. He records in his notebook each of Pólya's 17 tilings, just two to a page, and it is clear that these were not merely copied, but studied.

Following the Pólya paper, Escher's notebook records the bibliographic information on a paper by F. Haag [5]. Escher copied only one sentence of the text, Haag's definition of a regular plane tiling, from that paper. The tilings by polygons shown in that paper, as well as variants on them devised by Escher, fill several more notebook pages.

The medieval Islamic mathematical craftsmen, and the mathematicians Pólya and Haag, all spoke to Escher in the same language—the language of geometric figures. Escher's unusual receptivity to mathematical ideas and uncanny ability to discern the essential geometric relationships from this visual information allowed him to create the periodic designs which were his passion. Escher admitted that he “seriously tried to understand” the crystallographic literature he studied, “But they were mostly too difficult for my untrained mind and on the other hand they took no account of shade contrasts which for me are indispensable.” [7, p. vii] This last comment is especially interesting, for in 1937 (when Escher recorded Pólya's paper) crystallographers had not yet considered “antisymmetry,” or more generally, “color symmetry,” the study of groups of isometries acting on colored tilings and the action of the isometries on the colors of the tiles.

Perhaps influenced by his observations at the Alhambra, Escher insisted that his tilings be map-colored. But more than that, from the very beginning of his studies (which culminated in his own formulation of a theory of color symmetry) he wove together the action of coloring the periodic designs with the symmetries that created the designs. As a result, his designs were inevitably “perfectly colored.” (In algebraic terminology, a tiling with colored tiles is perfectly colored if the symmetry group which acts on the uncolored tiling induces a permutation of the set of colors of the tiles.)

Escher studied Pólya's tilings to understand their geometric structure, that is, how each tile was related to each of its neighbors. But his study went beyond this — he also considered how these tilings could be colored with a minimum number of colors in a way that was compatible with the symmetries of the tiling. Pólya had “colored” just one of his tilings, the diamond tiling labeled D_2 kkkk. Escher added color to his copies of four other tilings from Pólya's paper, and each one of these is a perfect coloring. His coloring of Pólya's fleur-de-lis design (D_3^2) with three colors is shown in FIGURE 2.

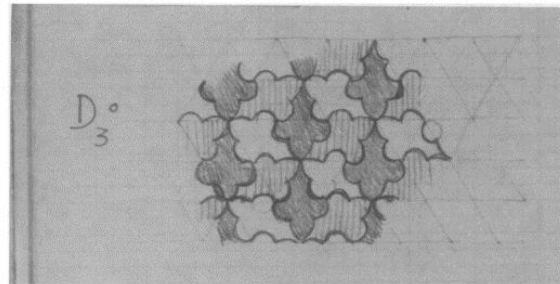


FIGURE 2

Pólya és Escher kapcsolata

In November, 1937, Escher received from his brother the addresses of mathematicians to whom he wished to write about his work. The address "Prof. Dr. G. Pólya, Dunantstrasse 4, Zürich" was the first on the list (P. Niggli and A. Speiser were also named). Sometime after that, Escher wrote to Pólya to tell of his work, and a correspondence began, which included Escher's sending drawings to Pólya. Unfortunately, none of that correspondence seems to have survived. Pólya left the ETH in Zürich in 1940, and abandoned materials in his office, including the Escher correspondence. In 1976, at the Gemeentemuseum in The Hague, I saw the notebook containing Escher's hand-copied version of Pólya's paper and took a photo of it which I sent to Pólya. He was delighted since he had no material evidence of the Pólya-Escher connection. In 1977 Pólya told me of his active correspondence with Escher.

In looking at Pólya's illustrative tilings, it is not hard to imagine several of these turning into Escher tilings of birds, reptiles, and fish. One of these tilings was definitely the inspiration for an Escher design of eagles. Pólya's tiling labeled $D_{1,gg}$ (pg in modern crystallographic notation; see [9]) was copied by Escher, then changed to a tiling by blocks of two of Pólya's tiles fused into a single tile. Then gradually the blocks were transformed into eagles. FIGURE 3 shows an early stage

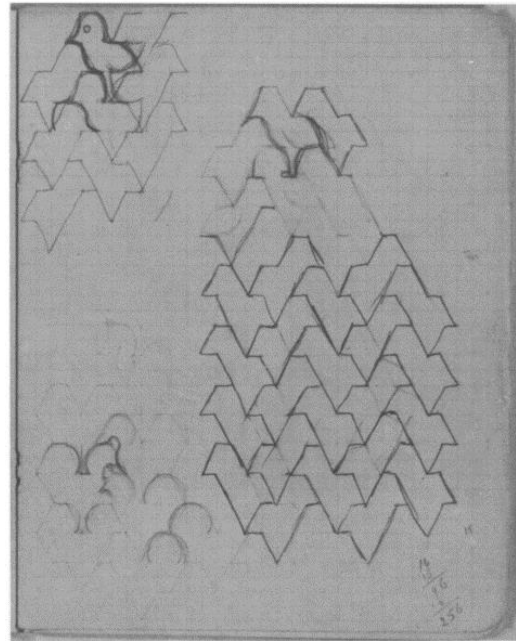


FIGURE 3

Pólya és Escher kapcsolata

in this metamorphosis. The final design, number 17 of Escher's finished colored periodic designs (dated winter '38), is perfectly colored in red, white, and blue (FIGURE 4). The notation at the bottom of the drawing reads "overgangs systeem V^C-IV^B "; Escher's classification according to his own system.

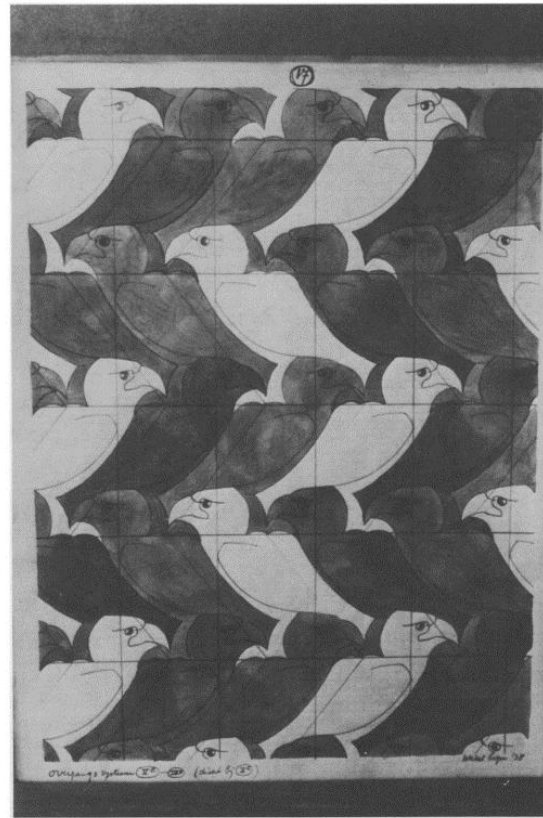
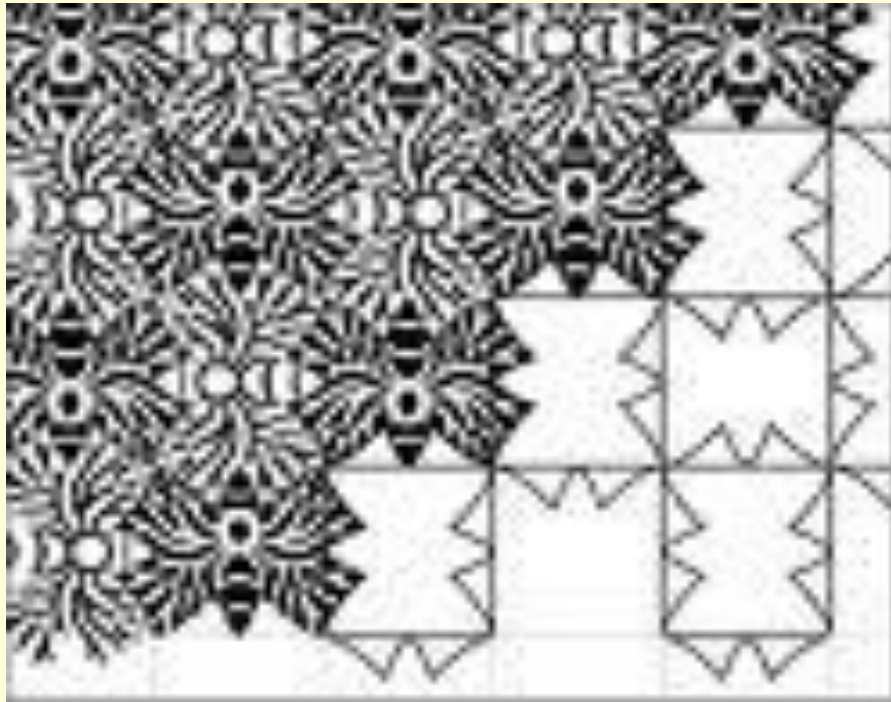


FIGURE 4

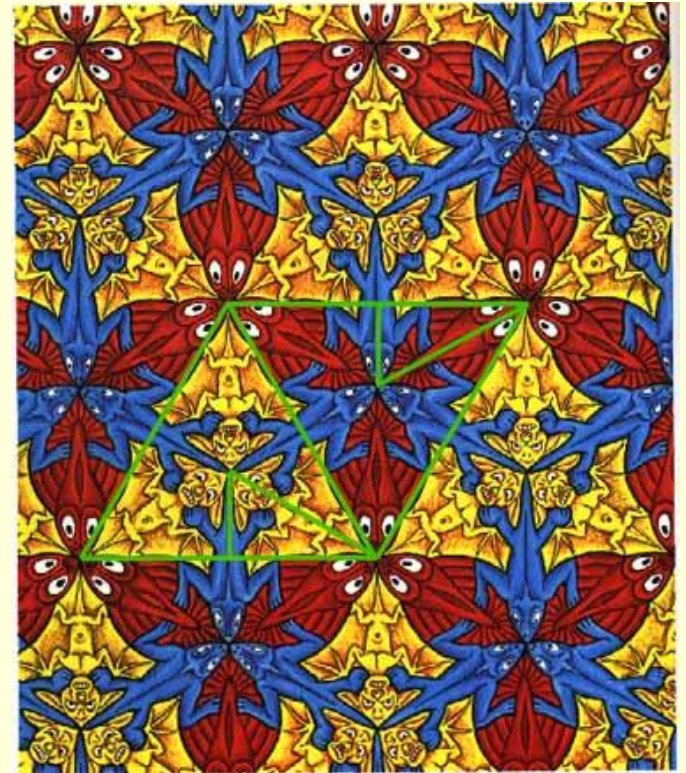
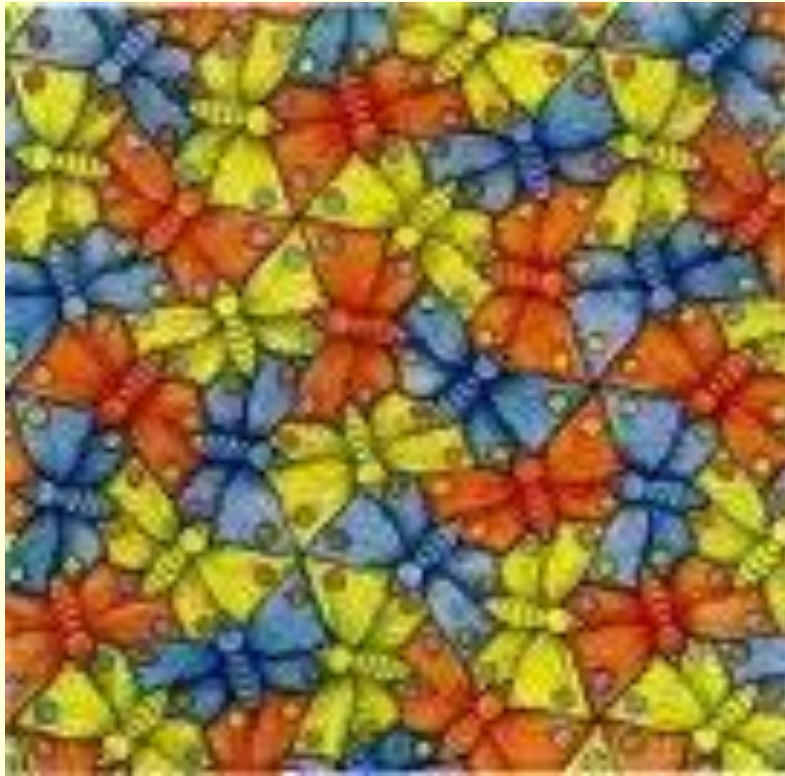
Pólya és Escher kapcsolata



Pólya és Escher kapcsolata



Pólya és Escher kapcsolata



Pólya és Escher kapcsolata



Pólya és Escher kapcsolata



Pólya György fő munkái

- *Collected papers*
 - I. Singularities of Analytic Functions (Kiadó: R. Boas)
 - II. Location of Zeros (Kiadó: R. Boas)
 - III. Analysis (Kiadó :J. Hersh – G. C. Rota)
 - IV. Probability, Combinatorics, Teaching and Learning Mathematics (Kiadó :G. C. Rota)
- Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Szegő Gáborral közösen), Springer Verlag, 1924, (magyar fordítás: Feladatok és tételek az analízis köréből I-II. Tankönyvkiadó, 1980)
- Inequalities, Cambridge-University Press, 1934 (közösen G. H. Hardy-val és J. E. Littlewood-dal)
- Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics (közösen Szegő Gáborral) Princeton, Princeton University Press, 1951

Pólya György fő munkái

- How to solve it? Princeton University Press, 1945 (magyar fordítás A gondolkodás iskolája, 2. kiadás, Gondolat, Budapest, 1969)
- Mathematics and Plausible Reasoning I-II., Princeton, Princeton University Press, 1954 (magyar fordítás: A matematikai gondolkodás művészete I-II. Indukció és analógia, A plauzibilis következtetés, Gondolat, Budapest, 1988, 1989)
- Mathematical Discovery on Understanding, Learning and Teaching Problem Solving I-II. New York, John Wiley Sons, 1962, 1965 (magyar fordítás: A probléma megoldás iskolája I-II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 1968)
- Mathematical Methods in Science, Washington 1963 (magyar fordítás: Matematikai módszerek a természettudományokban (Gondolat Kiadó, Budapest, 1984)

Pólya György fő munkái

Collected papers

- I. Singularities of Analytic Functions (Kiadó: R. Boas)
- II. Location of Zeros (Kiadó: R. Boas)
- III. Analysis (Kiadó :J. Hersh – G. C. Rota)
- IV. Probability, Combinatorics, Teaching and Learning Mathematics (Kiadó: G. C. Rota)
- Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis (Szegő Gáborral közösen), Springer Verlag, 1924, (magyar fordítás: Feladatok és tételek az analízis köréből I-II. Tankönyvkiadó, 1980)
- Inequalities, Cambridge-University Press, 1934 (közösen G. H. Hardy-val és J. E. Littlewood-dal)
- Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics (közösen Szegő Gáborral) Princeton, Princeton University Press, 1951

Stella Polya levele Vertse Judithhoz

Palo Alto, March 31/89

Dear Judit,

Many thanks for your letter. It is very kind of your Teacher Training School to organize a special session in mathematics to the memory of my husband. Everything you write about him is correct, except that he wrote math. articles in the *Matematikai Tanítás*. A former student, who is now head of department at Santa Clara University is going to write to you and send you some of his early papers, still written in Hungarian. At the same time as this letter, in another envelope, I am sending you a little souvenir, a compass he was sometimes using.

My native country is Switzerland; we used to speak French with my husband.

Good luck to your special meeting and best regards

Stella Polya

Irodalom

1. Alexanderson, G. L.: The Polya picture album, Basel, 1987
2. Lakatos file 129, item 230* és 236*, British Library of Political and Economics Science
3. Lakatos Imre: Bizonyítások és cáfolatok, Budapest, Typotex, 1998
4. Pólya György: A matematikai gondolkodás művészete I-II. Indukció és analógia, A plauzibilis következtetés, Gondolat , Budapest, 1988, 1989
5. Pólya György: A probléma megoldás iskolája I-II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1967, 1968)
6. Pólya György: Matematikai módszerek a természettudományokban, Gondolat Kiadó, Budapest, 1984

Irodalom

7. Pólya György, Szegő Gábor: Feladatok és tételek az analízis köréből I-II. Tankönyvkiadó, 1980
8. Pólya György: Über die Analogie der Krystalsymmetrie in der Ebene, Z. Kristall 60 (1924) 278-282
9. Rácz András: Pólya György, Magyar Tudós Lexikon A-tól Zs-ig, Better, MTESZ, OMIK, 651-652
10. Ribár Béla: Híres magyar tudósok, JMTT Kiskönyvtára
11. Schattschneider, D.: Vision of Symmetry Nortebooks, Pweidic Drawings, and Related works of M. C. Echer, W. H. Freeman Company, New York